

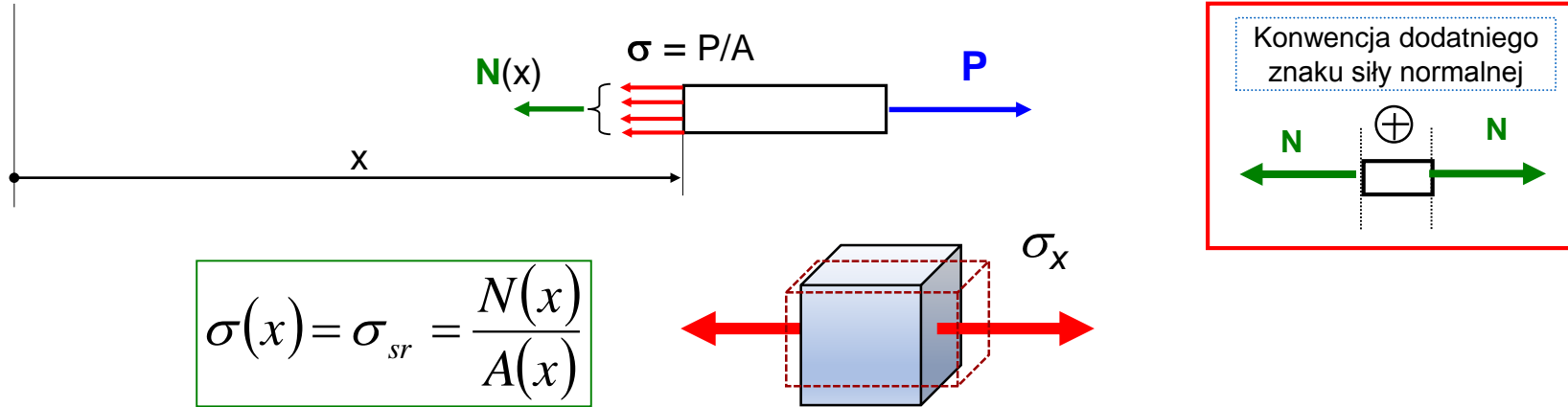
# *Wytrzymałość konstrukcji 1*

## Wykład 12

# Wytrzymałość złożona pręta

## Podsumowanie rozciągania

Zakładamy równomierny rozkład naprężeń normalnych w całym przekroju myślowego przecięcia



$$\sigma(x) = \sigma_{sr} = \frac{N(x)}{A(x)}$$

Stan odkształcenia, można policzyć z prawa Hooke'a

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$



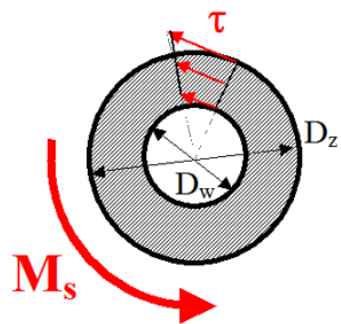
$$\varepsilon(x) = \frac{1}{E} \sigma_x$$

Możemy wyznaczyć funkcję przemieszczeń całkując funkcję odkształceń:

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx$$

# Podsumowanie skręcania

Rura kołowa



Jednostkowy kąt skręcania

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_0}$$

Naprężenie tnące

$$\tau = \frac{M_s \cdot r}{J_0}$$

Moment bezwładności na skręcanie

$$J_0 = \frac{\pi}{32} (D_z^4 - D_w^4)$$

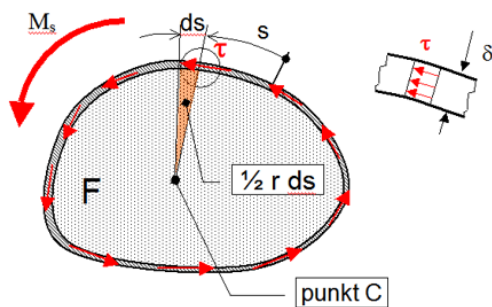
Naprężenie tnące maksymalne

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_0}$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie

$$W_0 = \frac{J_0}{r_{max}}$$

Rura cienkościenna

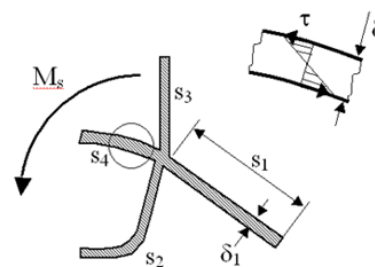


$$\theta(x) = \frac{M_s(x)}{4GF^2} \int \frac{ds}{\delta(s)}$$

$$\tau = \frac{M_s}{2F \cdot \delta}$$

$$J_s = \frac{4F^2}{\int \frac{ds}{\delta(s)}}$$

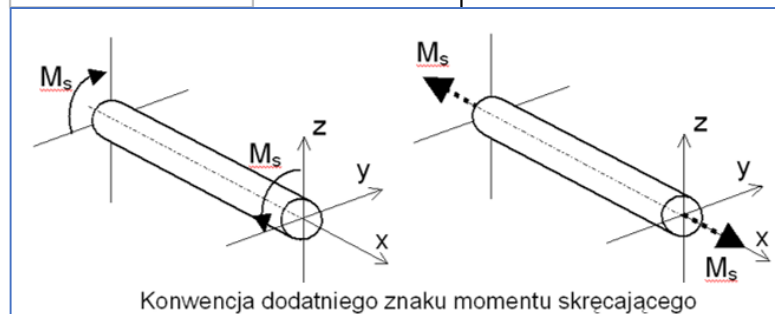
Profil cienkościenny otwarty



$$\theta = \frac{M_s}{GJ_s}$$

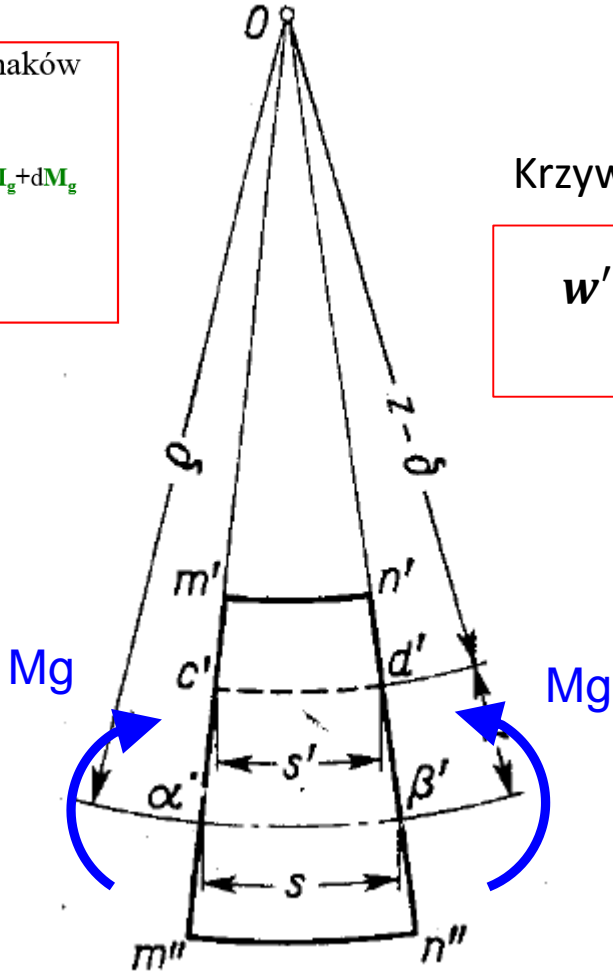
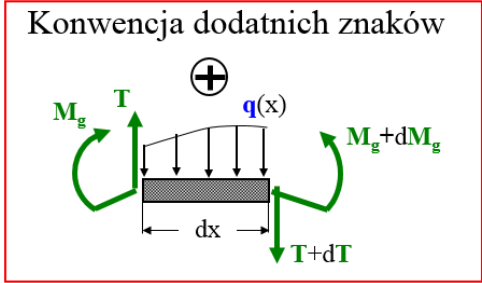
$$\tau = \frac{M_s \cdot \delta_i}{J_s}$$

$$J_s = \frac{1}{3} \sum s_i \delta_i^3$$



Konwencja dodatniego znaku momentu skręcającego

# Podsumowanie zginania



Krzywizna:

$$w'' \cong \frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{EJ_y}$$

Naprężenia normalne:

$$\sigma = -\frac{M_g z}{J_y}$$

Centralny główny moment bezwładności:

$$J_y = \int_A z^2 dA$$

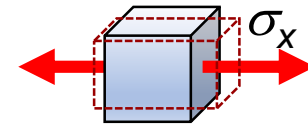
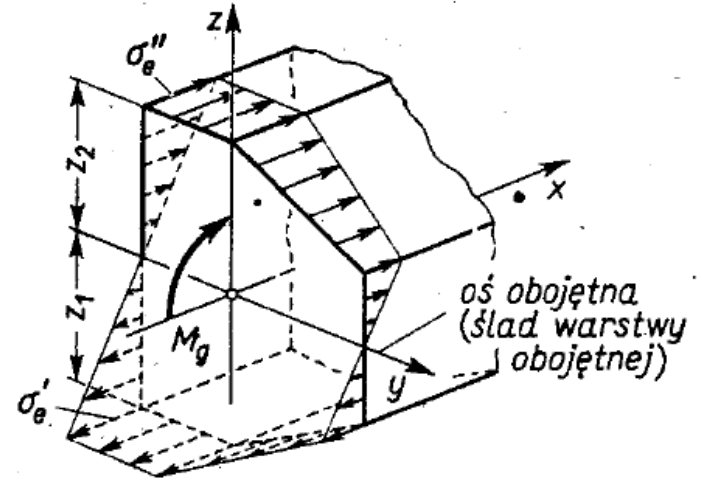
Naprężenia normalne ekstremalne:

$$\sigma^{extr} = -\frac{M_g z^{extr}}{J_y}$$

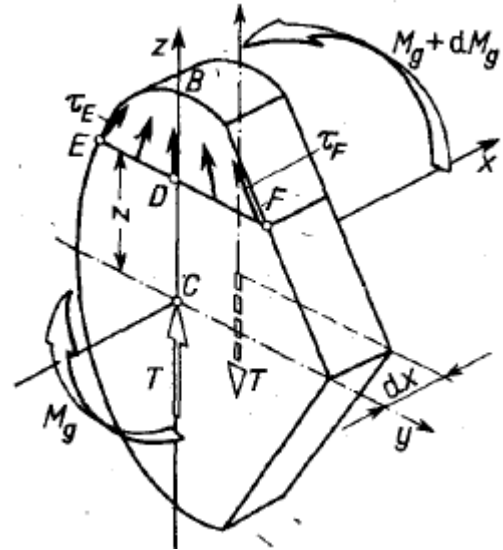
$$\sigma^{extr} = \frac{M_g}{w_y}$$

$$w_y = \frac{J_y}{z^{extr}}$$

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie



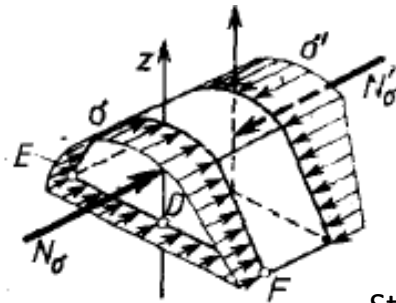
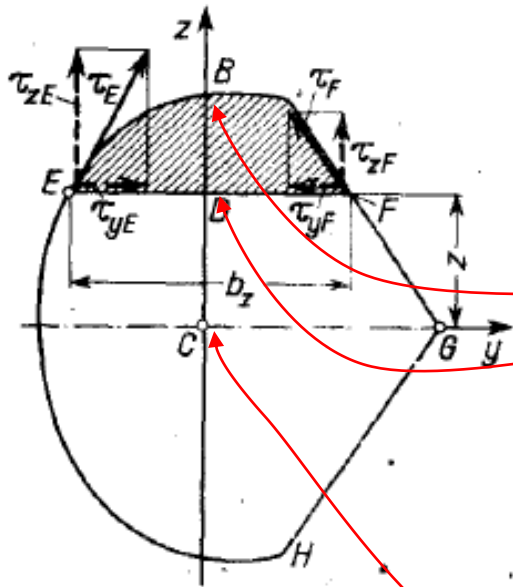
## Podsumowanie zginania



Średnie naprężenia tnące:

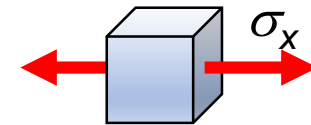
$$\tau_{sr} = \frac{T}{A}$$

Naprężenia tnące w belce o przekroju zwartym:

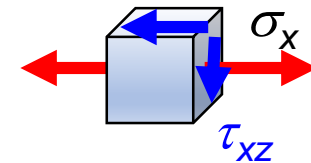


$$\tau = \frac{T \cdot S_y(z)}{J_y b_z}$$

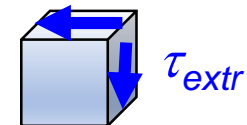
Stan naprężenia w punkcie B ( $z=z_{max}$ ):

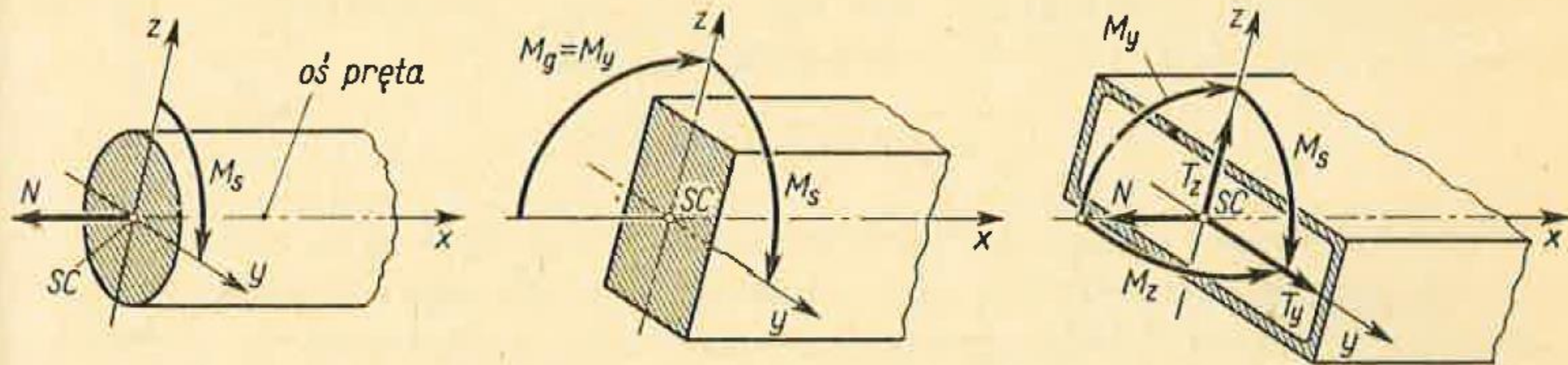


Stan naprężenia w punkcie D:



Stan naprężenia w punkcie C ( $z=0$ ):





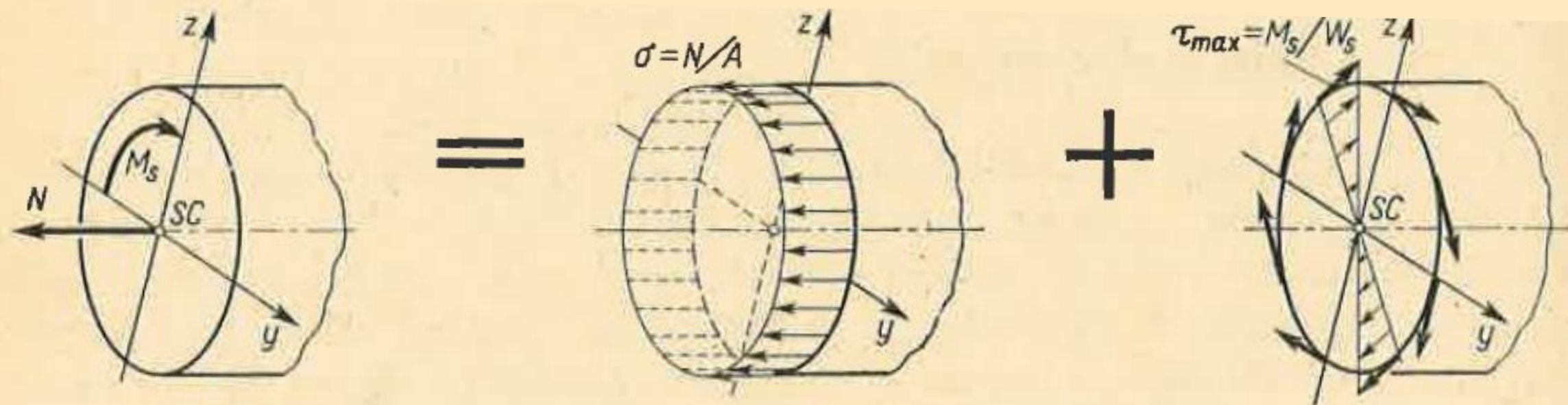
Rys. 8.14. Niektóre przypadki wytrzymałości złożonej pręta

Pierwszym etapem rozwiązania tych zagadnień jest określenie na całym przekroju obrazu i wartości naprężeń  $\sigma$  i  $\tau$  odpowiadających danemu złożonemu obciążeniu.

Wynik ten otrzymujemy z superpozycji stanów naprężeń odpowiadających prostym przypadkom obciążenia.

Etap drugi polega na wyszukaniu takiego elementu przekroju, w którym naprężenie  $\sigma_{red}$  jest największe.

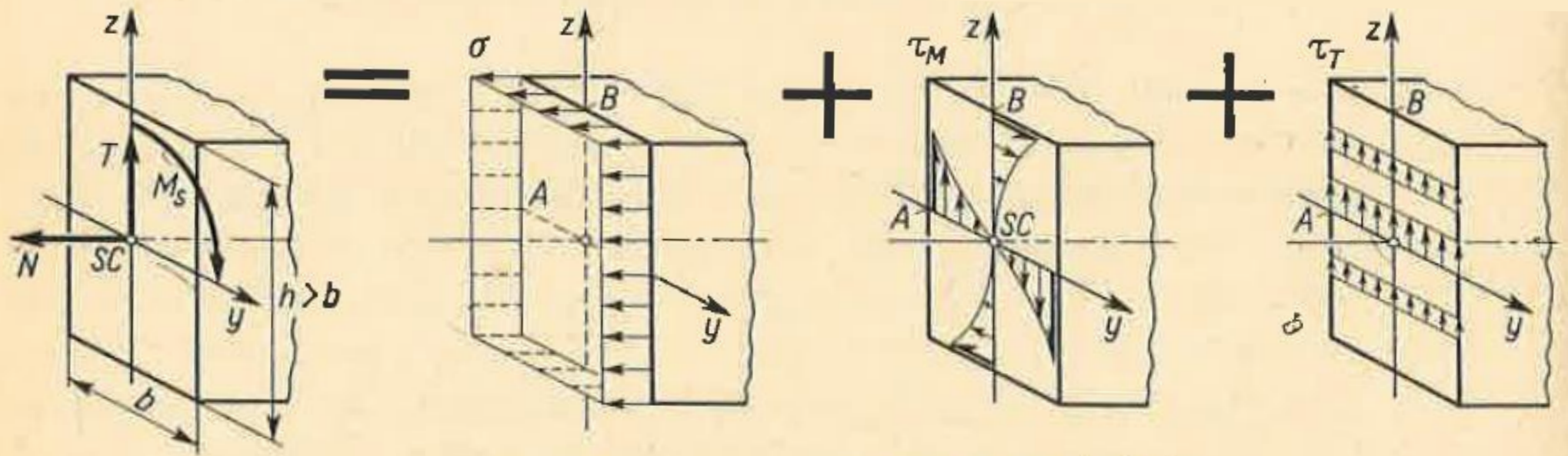
Stosując hipotezę Hubera, wartość  $\sigma_{red}$  określamy z wzoru 
$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$



Rys. 8.15. Analiza jednoczesnego rozciągania i skręcania

1. *Jednoczesne rozciąganie (ściskanie) i skręcanie* (rys. 8.15) cechuje *równomierny rozkład naprężeń normalnych*  $\sigma = N/A$ , odpowiadających sile wzdłużnej, oraz *nierównomierny rozkład naprężeń stycznych*  $\tau$  wywołanych momentem skręcającym  $M_s$ . Niebezpiecznym elementem przekroju jest więc ten, w którym  $\tau$  jest maksymalne. Ponieważ według (3.18):  $\tau_{max} = M_s/W_s$ , zatem największe  $\sigma_{red}$  jest:

$$\sigma_{red} = \sqrt{(N/A)^2 + 3(M_s/W_s)^2}.$$



Rys. 8.16. Analiza jednoczesnego rozciągania, ścinania i skręcania

2. *Jednoczesne rozciąganie (ściskanie), skręcanie i ścinanie* (rys. 8.16) różni się od poprzedniego tym, że naprężenie styczne  $\tau$  jest sumą  $\tau_M$  wywołanego skręcaniem i  $\tau_T$  odpowiadającego sile tnącej  $T$ . W poszczególnych punktach przekroju naprężenia  $\tau_M$  i  $\tau_T$  mają na ogół różne kierunki, wobec czego wypadkowe  $\tau$  jest na ogół sumą geometryczną  $\tau_M$  i  $\tau_T$ . Kierunki  $\tau_M$  i  $\tau_T$  są tam styczne do konturu i naprężenia te można sumować algebraicznie.

W konsekwencji największa wartość  $\sigma_{red}$  wynosi:

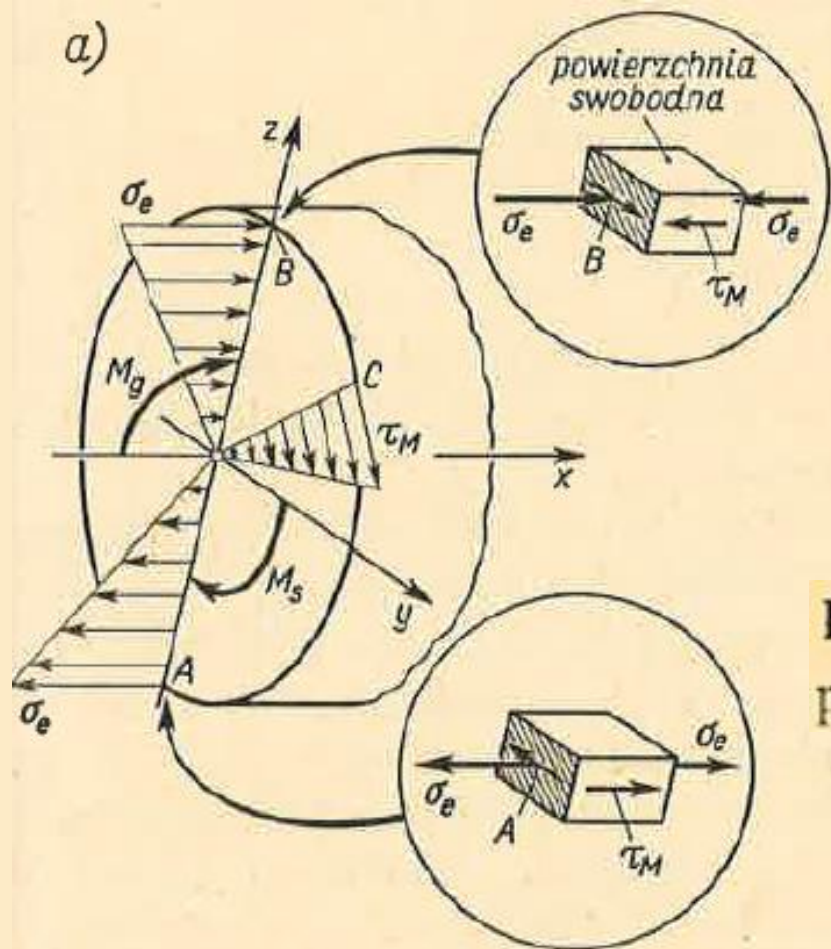
$$\sigma_{red} = \sqrt{(N/A)^2 + 3[(M_s/c_1 hb^2) + (3T/2bh)]^2}.$$



3. Jednoczesne skręcanie i czyste zginanie zbadamy naprzód, gdy przekrój pręta jest kołowy (rys. 8.17a). Jak wiemy z art. 3.3, ekstremalne naprężenia  $\tau_M$  są we wszystkich punktach przekroju leżących przy konturze, a ich wartość

$$\tau_M = M_s / W_0 = 16M_s / \pi d^3.$$

a)



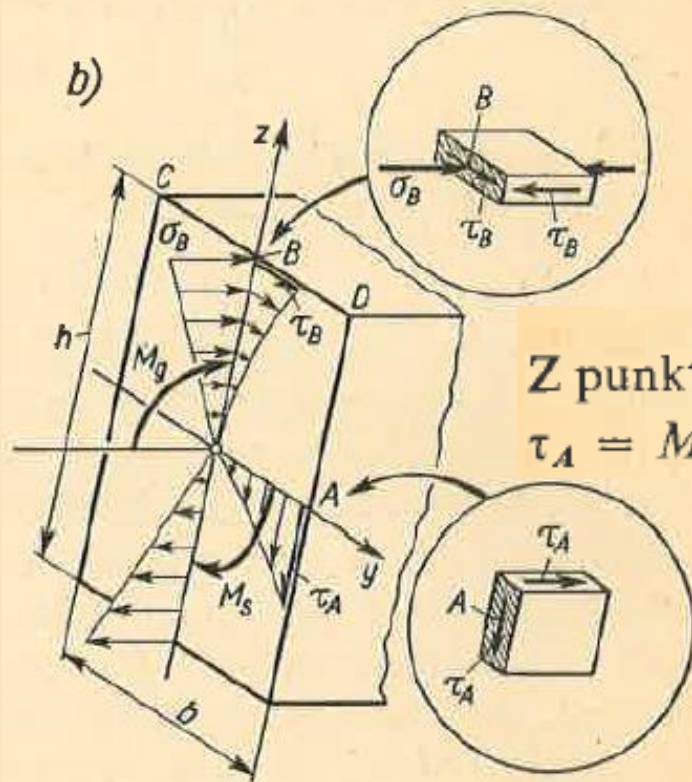
Działanie momentu  $M_b$  wywołuje tylko naprężenia normalne  $\sigma$ , osiągające w punktach A i B przekroju wartości ekstremalne

$$\sigma_e = \pm M_b / W_y = \pm 32M_b / \pi d^3$$

Podstawiając te wartości  $\sigma_e$  i  $\tau_M$  do (8.8b) mamy dla obydwóch punktów jednakowe największe  $\sigma_{red}$  równe

$$\sigma_{red} = \sqrt{M_b^2 + 0,75M_s^2} / W_y$$

Dla belki o przekroju prostokątnym (rys. 8.17b) z wszystkich punktów leżących przy krawędzi  $CD$  niebezpieczny<sup>(1)</sup> jest punkt  $B$ , w którym  $\sigma_B = M_g/W_y = 6M_g/bh^2$ ,  $\tau_B = c_3 M_s/c_1 hb^2$ ,



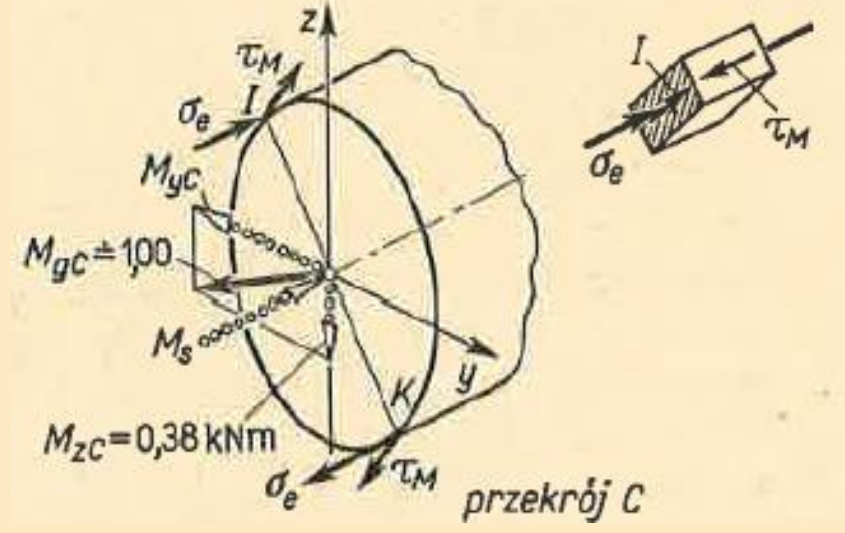
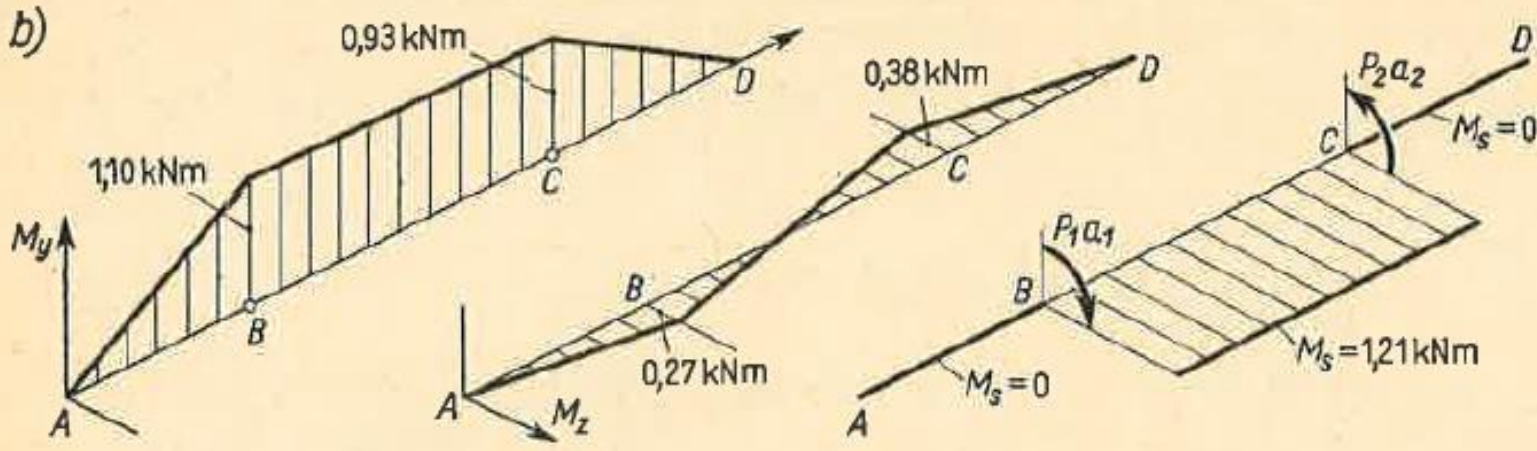
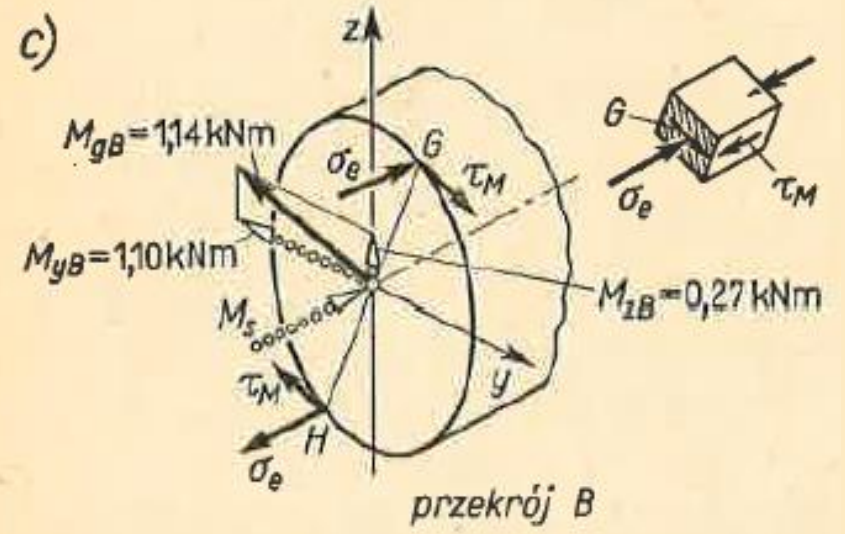
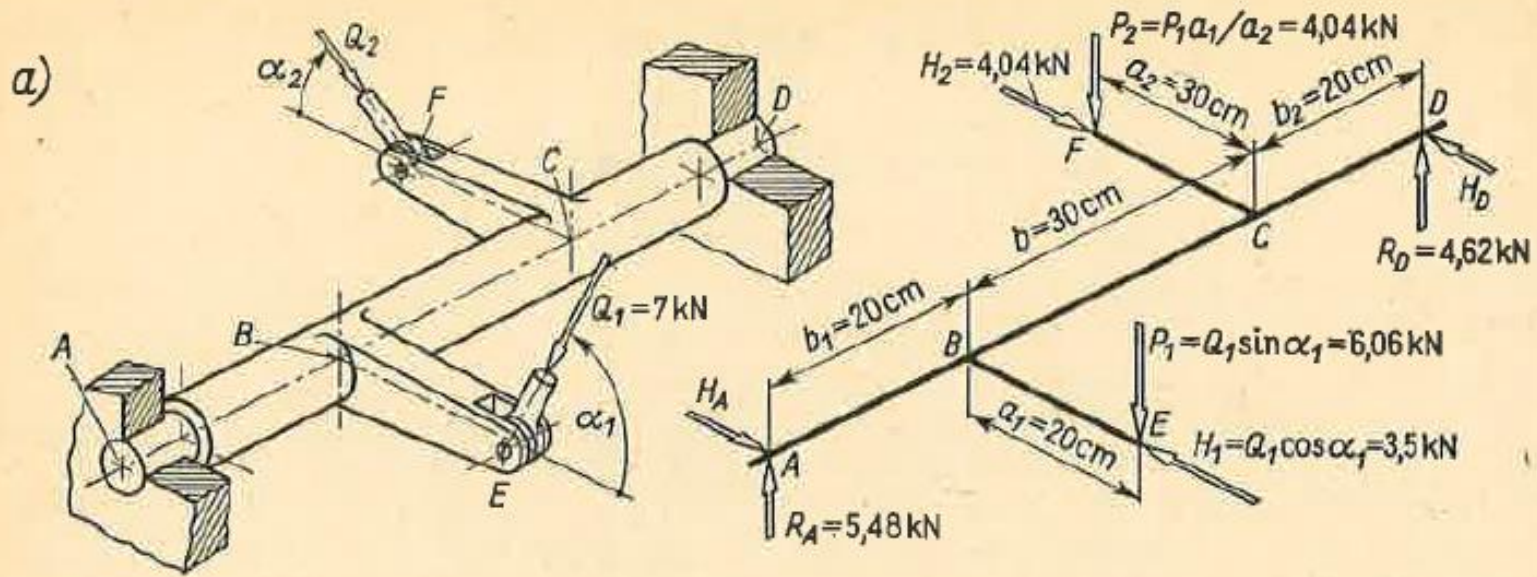
największe  $\sigma_{red}$  na tym odcinku konturu

$$(\sigma_{red})_B = \sqrt{(M_g/W_y)^2 + 3(c_3 M_s/c_1 hb^2)^2}$$

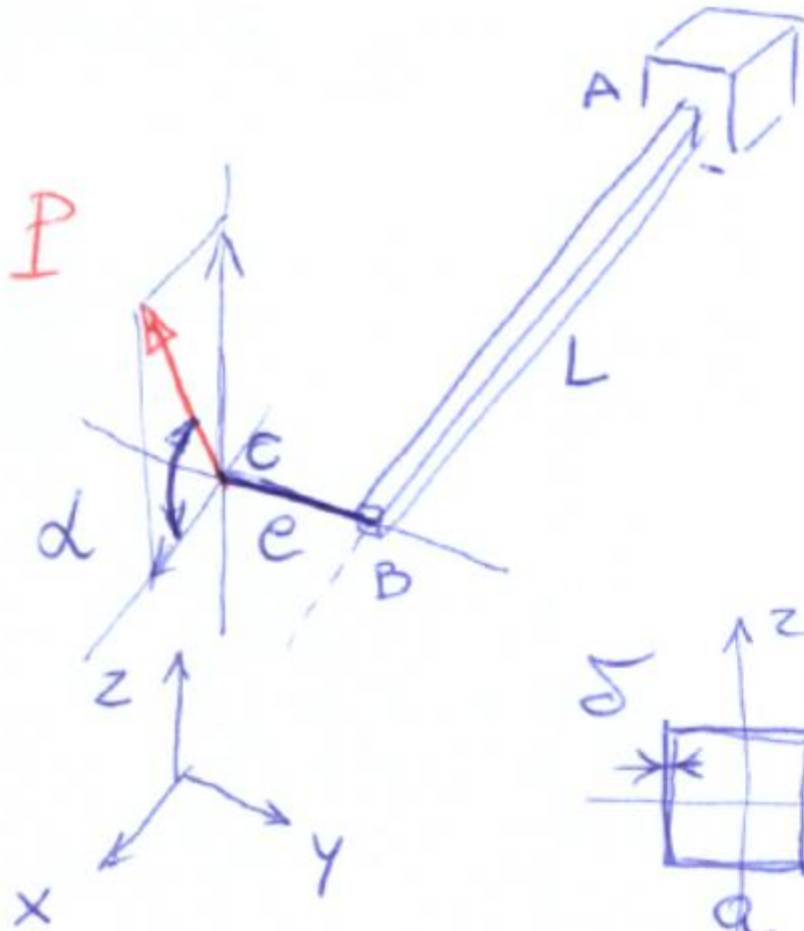
Z punktów leżących przy konturze  $DA$  niebezpieczny może być punkt  $A$ , w którym  $\sigma_A = 0$ ,  $\tau_A = M_s/c_1 hb^2$ , a naprężenie

$$(\sigma_{red})_A = (M_s/c_1 hb^2) \sqrt{3}$$

może być większe od  $(\sigma_{red})_B$ , gdy  $M_g \ll M_s$ . Ta analiza nie jest kompletna, nie jest bowiem pewne, czy któryś z punktów przy krawędzi  $DA$  nie ma  $\sigma_{red} > (\sigma_{red})_A$ . Ścisłą odpowiedź na to pytanie może dać tylko teoria sprężystości.



### Zadanie 12.1



Belka wspornikowa obciążona jest siłą  $P$  przyłożoną pod kątem  $\alpha$  do kierunku  $x$ , w punkcie C oddalonym od jej swobodnego końca o długość stywnego ramienia

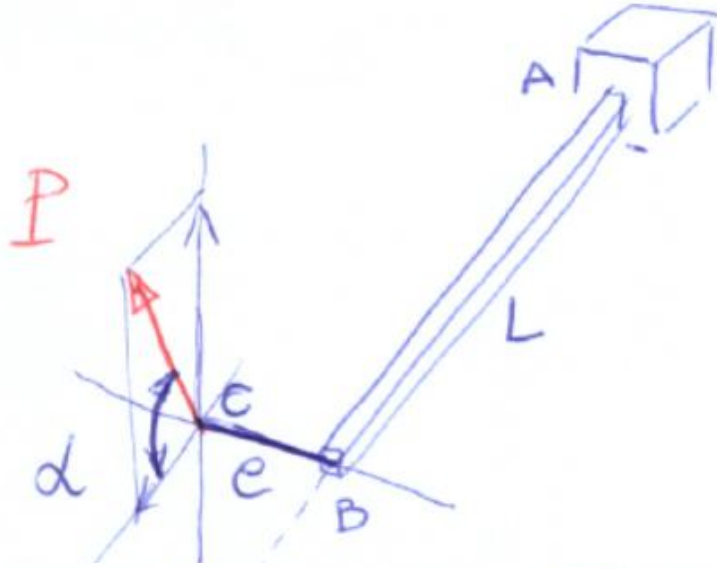
$$A \approx 4a\delta$$

$$F \approx a^2$$

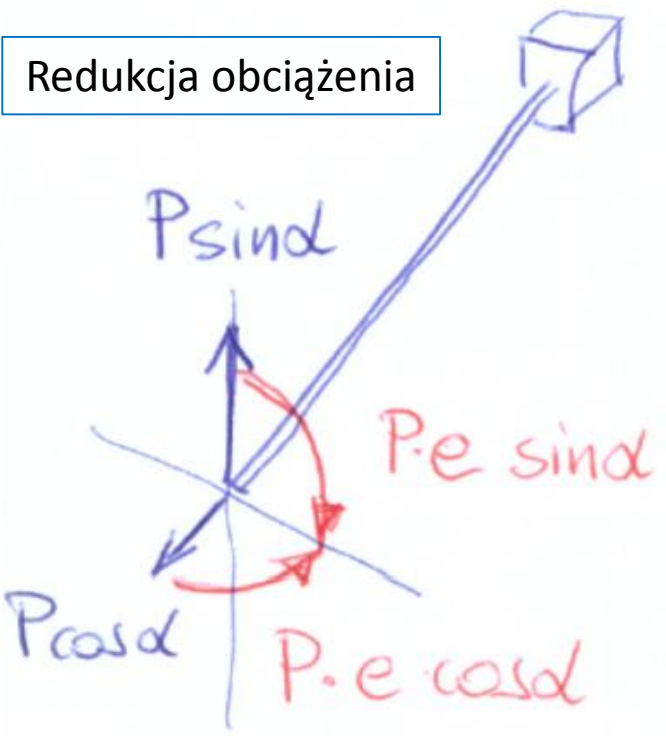
$$J_y \approx \left( \frac{\delta a^3}{12} + a\delta \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right) \cdot 2$$

$$J_y \approx \frac{2}{3} a^3 \delta$$

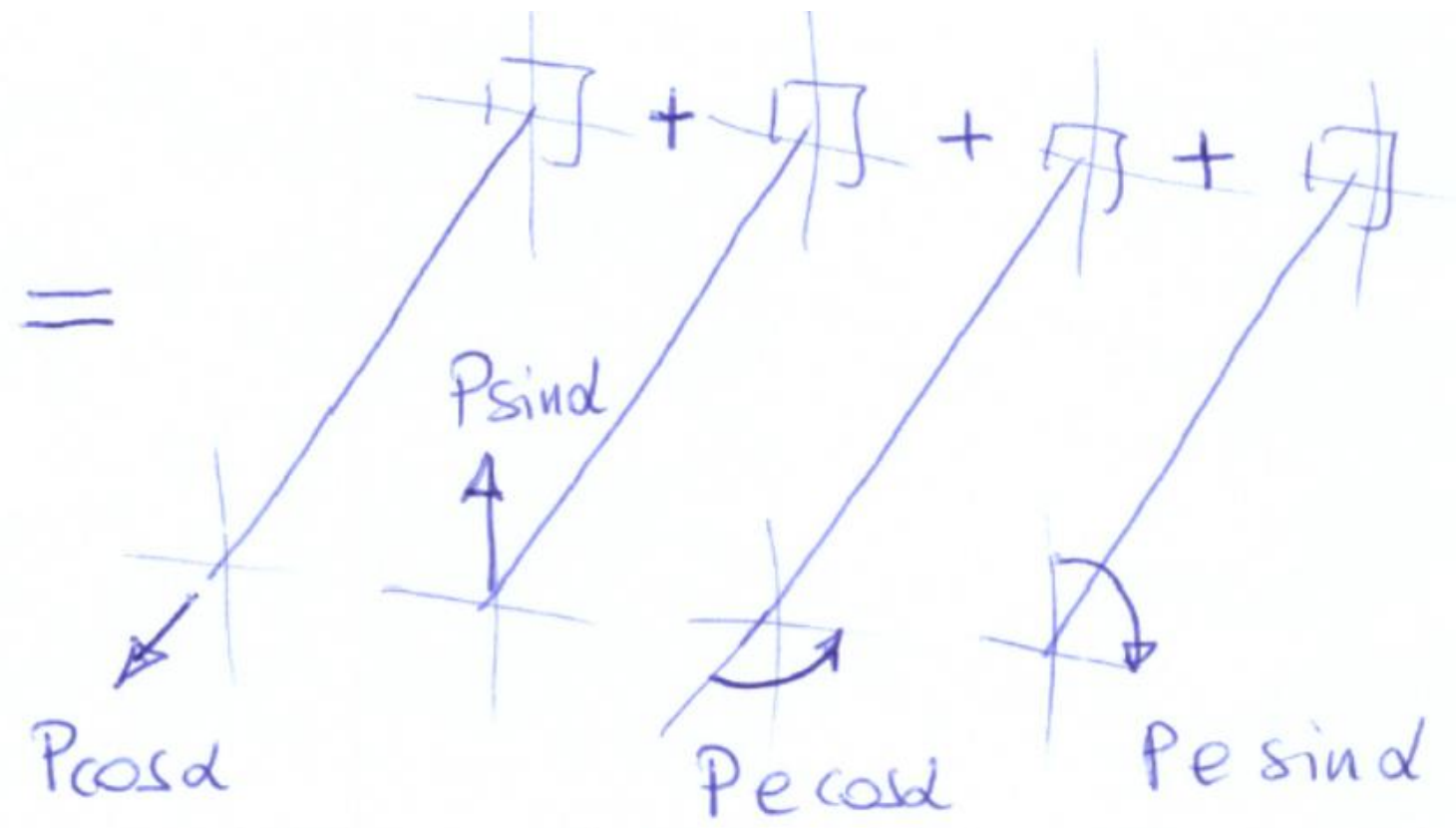
$$W_y \approx \frac{4}{3} a^2 \delta$$

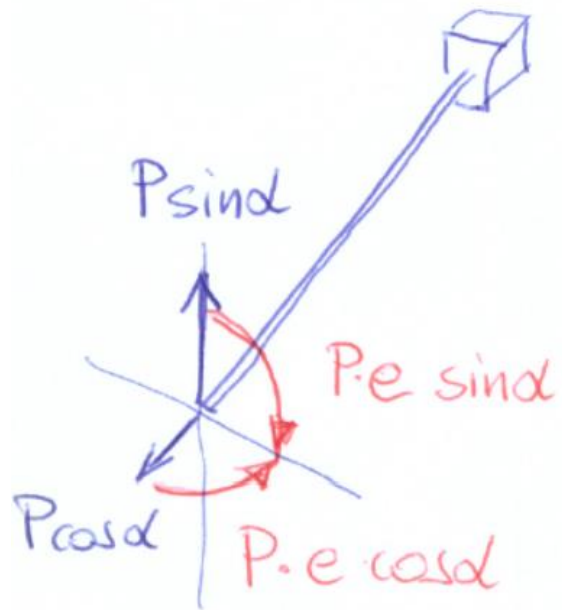


Redukcja obciążenia

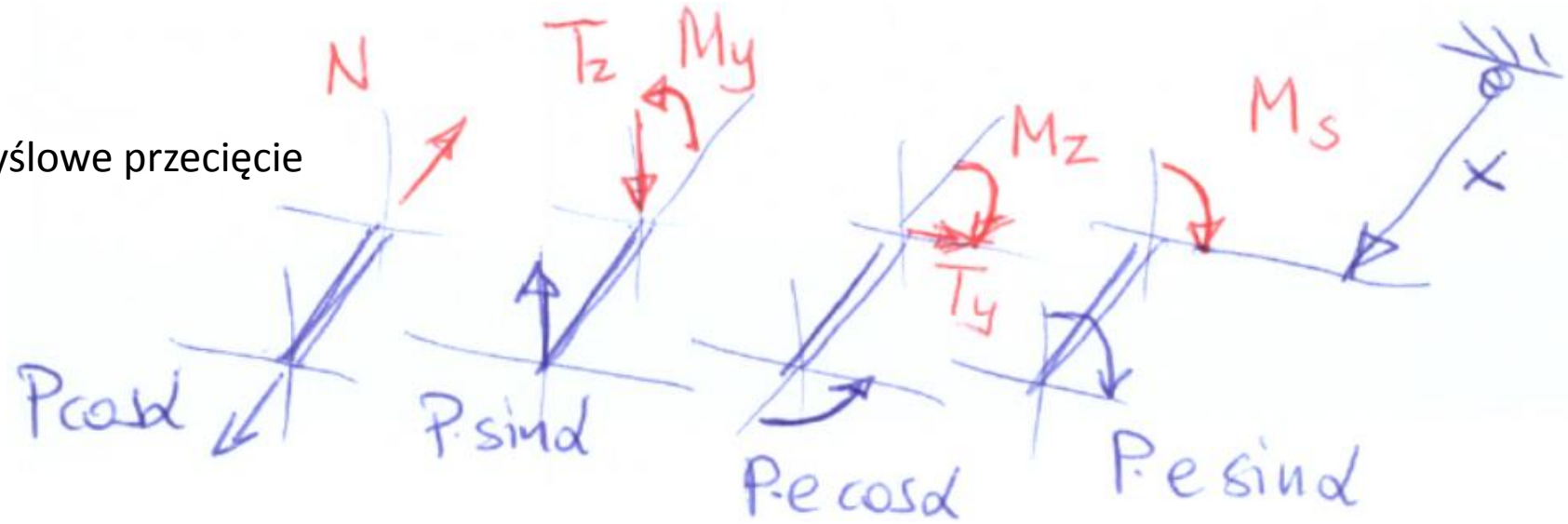


Superpozycja stanów obciążenia





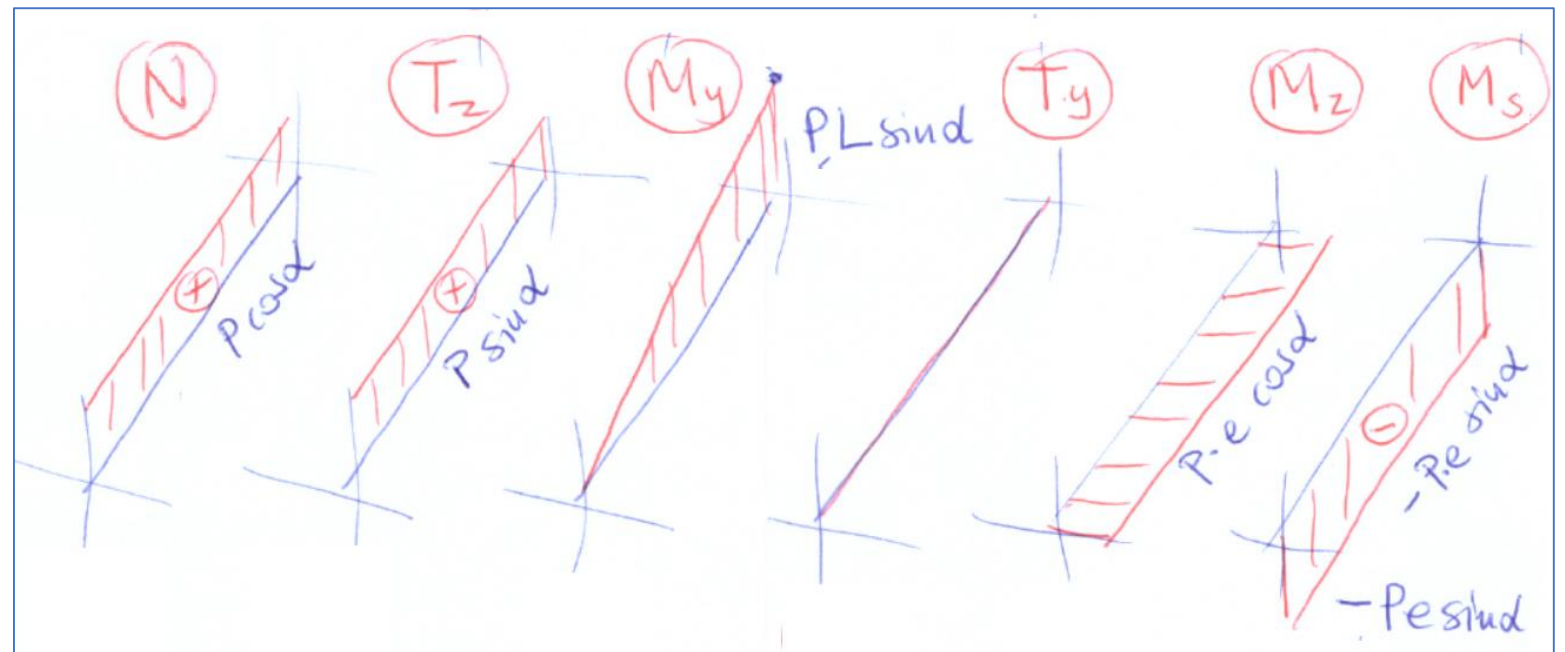
Myślone przecięcie



Składowe wysiłku przekroju

$$\begin{aligned}
 N &= P \cos \alpha \\
 T_z &= P \sin \alpha \\
 M_y &= P \cdot \sin \alpha (L - x) \\
 T_y &= 0 \\
 M_z &= P \cdot e \cos \alpha \\
 M_s &= - P \cdot e \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Wykresy Składowych wysiłku przekroju

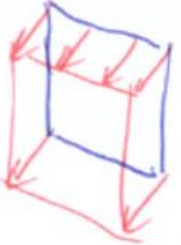


# Przekrój $x=0$


$$\bar{\sigma}_N = \frac{N}{A}$$

$$\bar{\sigma}_{M_y} = -\frac{M_y}{J_y} \cdot z$$

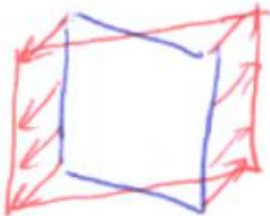
$$\bar{\sigma}_{M_z} = -\frac{M_z}{J_z} \cdot y$$




$$\bar{\sigma}_N = \frac{P \cos \alpha}{4a\delta}$$



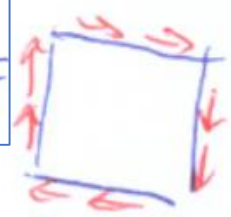
$$\bar{\sigma}_{M_y}^{\text{ext}} = \frac{PL \sin \alpha}{\frac{4}{3} a^2 \delta}$$



$$\bar{\sigma}_{M_z}^{\text{ext}} = \frac{P \cdot e \cos \alpha}{\frac{4}{3} a^2 \delta}$$

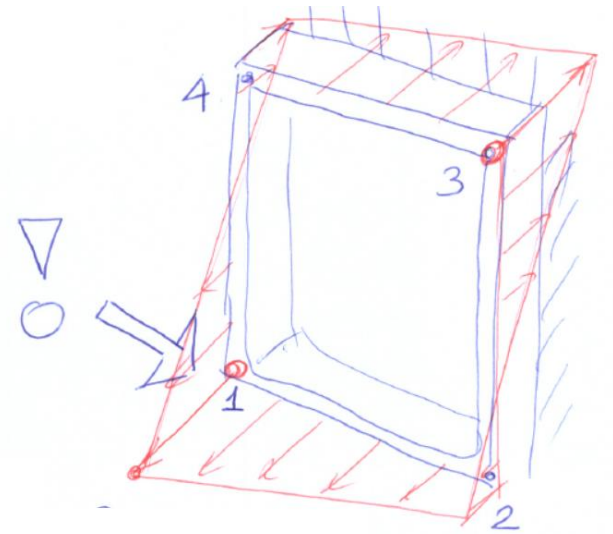
$$\tau_{T_z} = \frac{T_z \cdot S_y(z)}{J_y \cdot b}$$


$$\tau_{T_z}^{\text{ext}} \approx \frac{T_z}{A_{II}} = \frac{P \sin \alpha}{2a\delta}$$

$$\tau_{M_s} = \frac{M_s}{2F\delta}$$


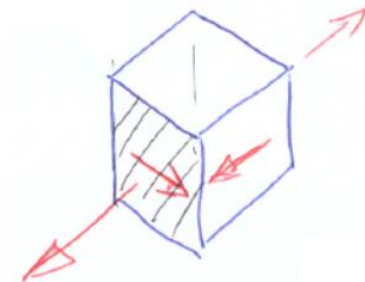
$$\tau_{M_s} = \frac{-P \cdot e \sin \alpha}{2a^2 \delta}$$

Punkt 1



$$\bar{\sigma} = \frac{3PL \sin \alpha}{4a^2 \delta} + \frac{3Pe \cos \alpha}{4a^2 \delta} + \frac{P \cos \alpha}{4a\delta}$$

$$\tau_{M_s} = -\frac{P \cdot e \sin \alpha}{2a^2 \delta}$$

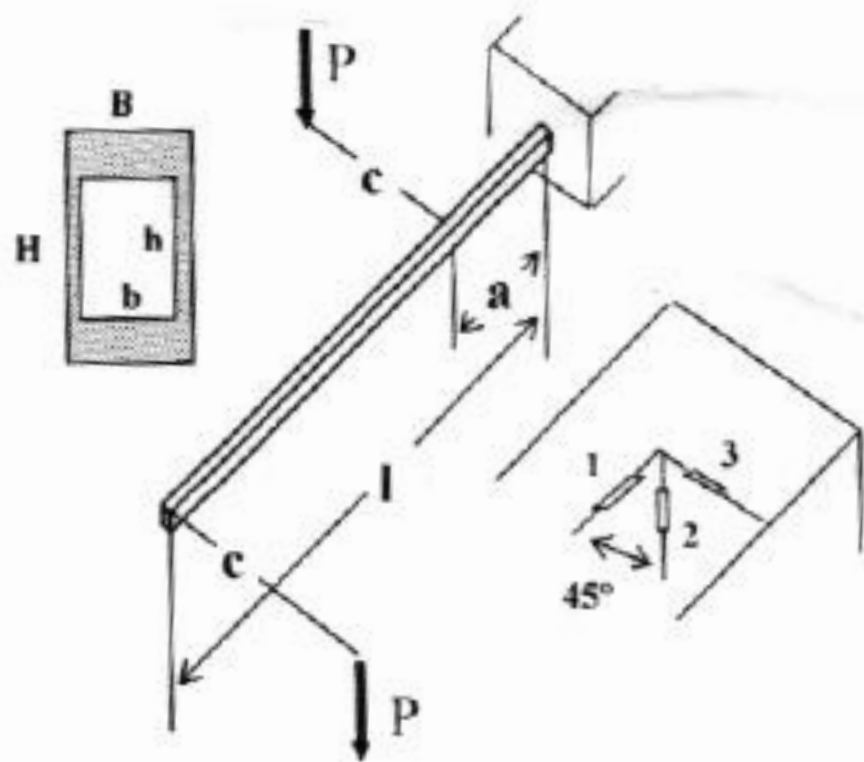


$$\bar{\sigma}_{\text{red}}^H = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 3\tau^2}$$

$$\bar{\sigma}_{\text{red}}^T = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 4\tau^2}$$

## Zadanie 12.2 (typu egzaminacyjnego)

### Zadanie 3.



Wyznaczyć :

- 1) rozkłady sił przekrojowych (obliczenia i wykresy)
- 2) maksymalne naprężenie zred. wg. hipotezy Hubera
- 3) wskazania tensometrów rozetki naklejonej na górnej powierzchni najbardziej niebezpiecznego przekroju
- 4) kąt obrotu przekroju końcowego od skręcania.

Przekrój pręta jest podwójnie symetryczny .

Zastosować wzory Bredta .

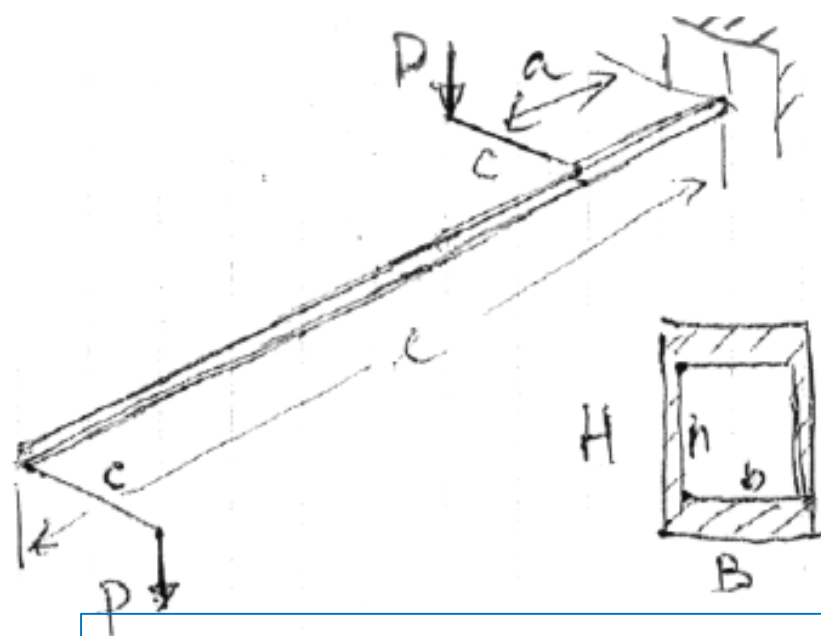
Dane :  $l = 2 \text{ m}$  ,  $a = 0,4 \text{ m}$  ,  $P = 1,2 \text{ kN}$  ,

$H = 100 \text{ mm}$  ,  $h = 84 \text{ mm}$  ,

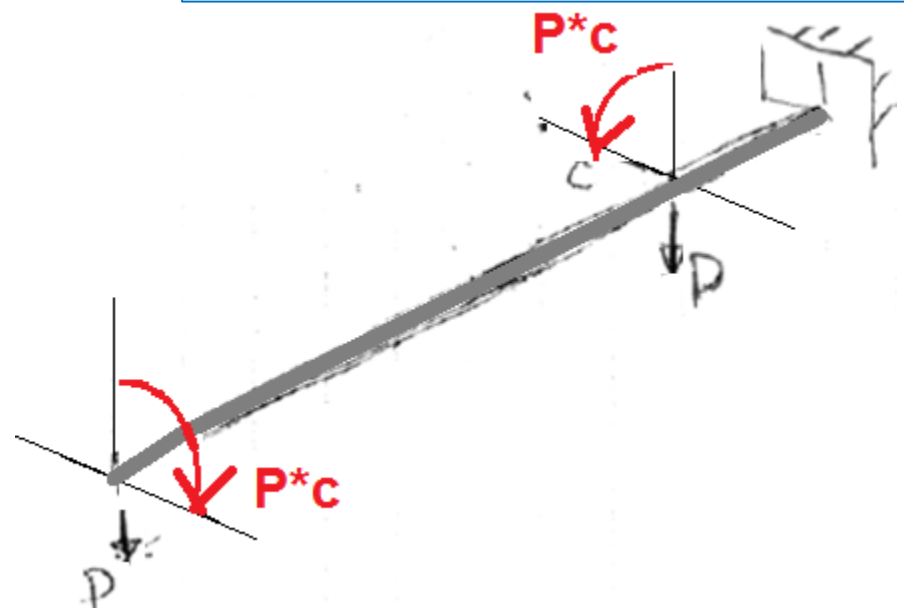
$B = 40 \text{ mm}$  ,  $b = 36 \text{ mm}$  ,

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  ,  $\nu = 0,3$  ,  $c = 0,6 \text{ m}$  .





Redukcja obciążenia



$$l = 2\text{ m}, a = 0,4\text{ m}, c = 0,6\text{ m}, P = 1,2\text{ kN}$$

$$H = 100, h = 84, B = 40, b = 36, E = 2 \cdot 10^5\text{ MPa}, \nu = 0,3$$

Charakterystyki przekroju:

$$J_y = \frac{100^3 \cdot 40 - 84^3 \cdot 36}{12} = 1,555 \cdot 10^6\text{ mm}^4$$

$$(W_y = \frac{1,555 \cdot 10^6}{50} = 3,11 \cdot 10^4\text{ mm}^3)$$

$$F = 92 \cdot 38 = 3496\text{ mm}^2$$

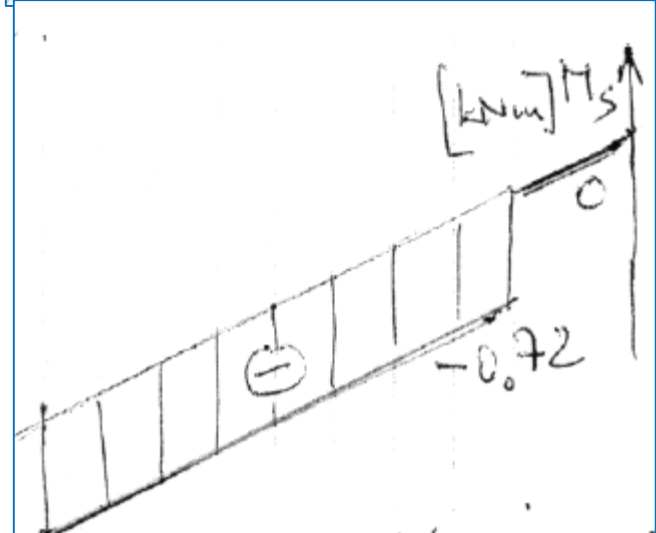
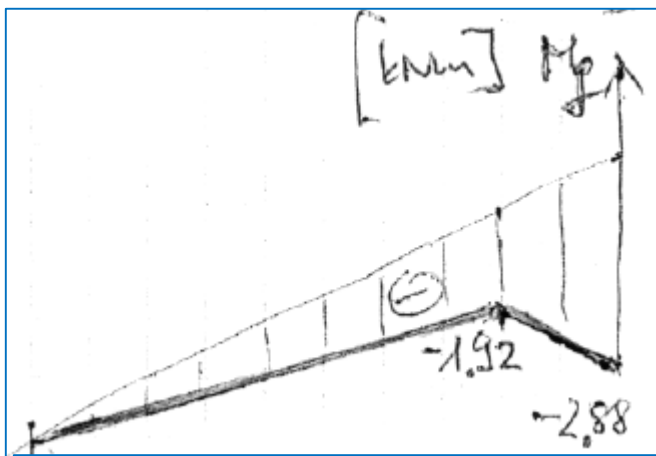
$$\oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2 \cdot 92}{2} + \frac{2 \cdot 38}{8} = 101,5$$

$$J_s = \frac{4 \cdot 3496^2}{101,5} = 0,4877 \cdot 10^6\text{ mm}^4$$

$$W_s = 2F\delta_{\min} = 2 \cdot 3496 \cdot 2 = 13984\text{ mm}^3\text{ (bok)}$$

$$(W_s^I) = 2F \cdot \delta^I = 2 \cdot 3496 \cdot 8 = 55936\text{ mm}^3\text{ (głowa)}$$

Składowe wysiłku przekroju:



Stan naprężenia:

przekroj; pola,  $x=0$  ;

$$M_g = -2.88 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \\ M_s = 0$$

$$\sigma_g^{\max} = - \frac{-2.88 \cdot 10^6}{3.11 \cdot 10^4} = 92.4 \text{ MPa} = \sigma_{\text{red}} \quad (\tau_s = 0)$$

przekroj a+ ;

$$M_g = -1.92 \cdot 10^6 \text{ Nmm}, \quad M_s = -0.72 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

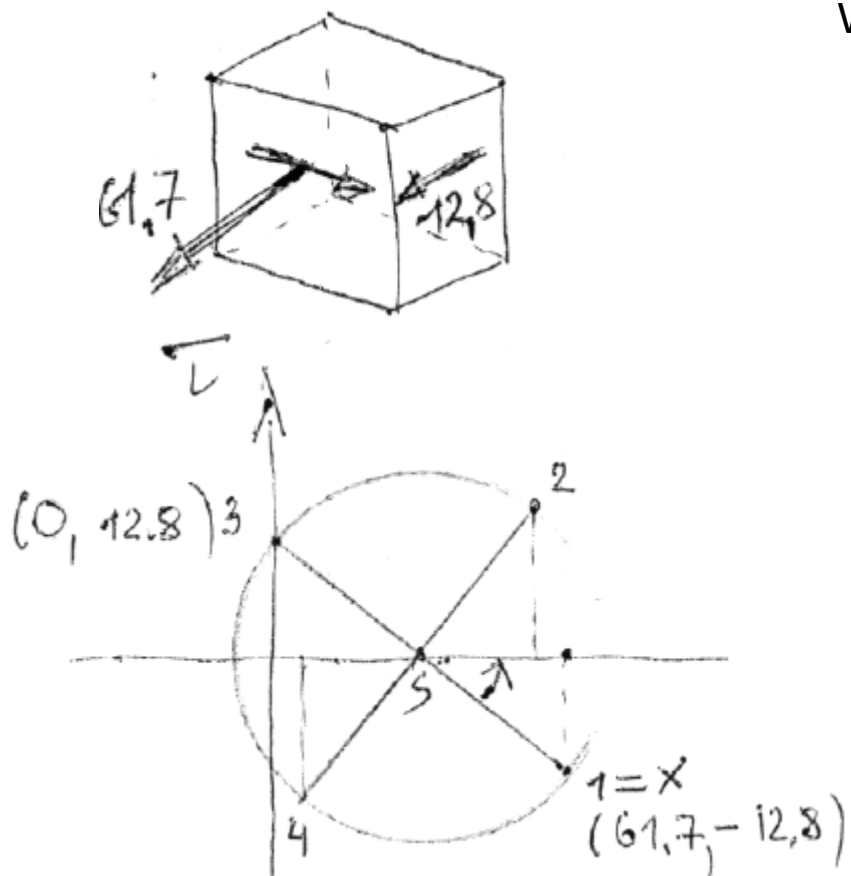
$$* z=50 : \sigma_g = - \frac{-1.92 \cdot 10^6}{3.11 \cdot 10^4} = 61.7, \quad \tau_s = \frac{M_s}{W_s} = \frac{-0.72 \cdot 10^6}{5.59 \cdot 10^4} = -12.8 \text{ MPa}$$

$$z=50 : \sigma_{\text{red}}^H = \sqrt{61.7^2 + 3 \cdot 12.8^2} = 65.5$$

$$* z=42 : \sigma_g = - \frac{-1.92 \cdot 10^6}{4.56 \cdot 10^4} \cdot 42 = 51.6, \quad \tau_s^{\max} = \frac{M_s}{W_s} = \frac{-0.72 \cdot 10^6}{1.44 \cdot 10^4} = -51.5 \text{ MPa}$$

$$, z=42 : \sigma_{\text{red}}^H = \sqrt{51.6^2 + 3 \cdot 51.5^2} = 103.2 \text{ MPa}$$

Wskazania rozetki tensometrów:



$$s = \frac{61,7}{2} = 30,85 \quad , \quad \tau_{31} = 12,8$$

$$\sigma_2 = s + \tau = 30,85 + 12,8 = 43,65 \text{ MR}$$

$$\sigma_4 = s - \tau = 30,85 - 12,8 = 18,05 \text{ MR}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{61,7}{200 \cdot 10^3} = 0,309\%$$

$$\varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1 = -0,3 \cdot (0,309)\% = -0,093\%$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_4) = \frac{10^3}{200} (43,7 - 0,3 \cdot 18) = 0,192\%$$

Kąt skręcenia:

$$GJ_s = 0,269 \cdot 10^5 \cdot 0,4877 \cdot 10^6 = 0,37 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$$

$$\varphi(l) = -19,46 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \approx -31,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = -1,8^\circ$$